文章编号: 2095-1663(2011)05-0065-03

判别分析法及其在教育评估中的应用

陈 伟 夏清泉

(中国科学技术大学研究生院,安徽 合肥 230026)

摘 要:判别分析是多元统计分析的一种方法,已在物种分类、经济分析、地质勘探、天气预报等诸多领域得到广泛的应用。本文首先介绍了判别分析的数学模型和求解方法,然后结合第十次新增博士学位授予单位的实际评审材料,阐述了判别分析方法在此类评估中的应用,以期该定量分析方法能在教育评估领域得到有效的利用。

关键词:多元统计;判别分析;教育评估

中图分类号: G40-058.1 文献标识码: A

判别分析是判定样品所属类型的一种多元统计方法,已在物种分类、经济分析、地质勘探、天气预报等诸多领域得到广泛的应用。本文即以新增博士学位授予权单位审核评估为例,对判别分析在教育评估中的应用进行一些探讨。

一、模型的建立与求解

1. 判别系数的确定

我们这里采用 Fisher 判别法。Fisher 判别法的思想是将 K 组(类) p 维数据投影到某一方向上,使得组与组之间的距离尽可能地分开。

设从 K 个总体中分别取得 K 组 p 维观察值,为

$$\begin{array}{lllll} G_1: & x_1^{(1)} & x_2^{(1)} & \cdots & x_{n_1}^{(1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ G_K & x_1^{(k)} & x_2^{(k)} & \cdots & x_{n_k}^{(k)} \end{array}$$

其中 x 均为 p 维向量, $n_1, \cdots, n_k$ 为每组中元素个数, $\sum_{\alpha=1}^{k} n_\alpha = n$。

我们称以上数据阵列为样本数列,样本总数为 n。

令 a 为 R^p 中的任一向量。

$$\mu(x) = a^T x \tag{1}$$

是 x 在以 a 为法方向的轴上的投影,则样本数列的投影为

$$\begin{array}{lllll} G_1: & a^T x_1^{(1)} & a^T x_2^{(1)} & \cdots & a^T x_{n_1}^{(1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ G_K & a^T x_1^{(k)} & a^T x_2^{(k)} & \cdots & a^T x_{n_k}^{(k)} \end{array}$$

这里, $a^T x_i^{(\alpha)}$ 均为实数。将 G_α 中数据投影的均值记为 $a^T \overline{x}^{(\alpha)}$,有

$$a^T \overline{x}^{(\alpha)} = \frac{1}{n_\alpha} \sum_{i=1}^{n_\alpha} a^T x_i^{(\alpha)} (\alpha = 1, 2, \cdots, K) \tag{2}$$

K 组数据投影的总均值为:

$$a^T \overline{x} = \frac{1}{n} \sum_{\alpha=1}^{K} \sum_{i=1}^{n_\alpha} a^T x_i^{(\alpha)} \tag{3}$$

因此,各组间离差的平方和为

$$\mathrm{GSD} = \sum_{\alpha=1}^{K} n_\alpha (a^T \overline{x}^{(\alpha)} - a^T \overline{x})^2$$

收稿日期:2011-08-05

作者简介:陈伟(1971—),男,重庆人,中国科学技术大学研究生院副院长,副教授,博士.
夏清泉(1985—),男,安徽池州人,中国科学技术大学公共事务学院公共管理专业博士研究生.

$$= a^T[\sum_{\alpha=1}^{K} n_\alpha(\bar{x}^{(\alpha)} - \bar{x})(\bar{x}^{(\alpha)} - \bar{x})^T]a$$
$$= a^T Ba$$

式中

$$B = \sum_{\alpha=1}^{K} n_\alpha(\bar{x}^{(\alpha)} - \bar{x})(\bar{x}^{(\alpha)} - \bar{x})^T$$

$\bar{x}^{(\alpha)}$ 为第 K 组的均值向量；$\bar{x}$ 为总均值向量。

K 组数据的组内离差平方和为

$$\text{ISD} = \sum_{\alpha=1}^{K}\sum_{i=1}^{n_\alpha}(a^T x_i^{(\alpha)} - a^T\bar{x}^{(\alpha)})^2$$
$$= a^T[\sum_{\alpha=1}^{K}\sum_{i=1}^{n_\alpha}(x_i^{(\alpha)} - \bar{x}^{(\alpha)})(x_i^{(\alpha)} - \bar{x}^{(\alpha)})^T]a$$
$$= a^T Ea$$

式中

$$E = \sum_{\alpha=1}^{K}\sum_{i=1}^{n_\alpha}(x_i^{(\alpha)} - \bar{x}^{(\alpha)})(x_i^{(\alpha)} - \bar{x}^{(\alpha)})^T$$

我们的目的就是要选取 a，使各组间尽可能分开，同时，又使每一组内的差异尽可能地小，即求如下优化问题：

$$\delta(a) = \frac{a^T Ba}{a^T Ea} \to \max \tag{4}$$

由代数知识可知，$\delta(a)$ 的最大值是 λ_1，它是方程

$$|B - \lambda E| = 0 \tag{5}$$

的最大特征根。于是 a 即为对应于 λ_1 的特征向量。将 a 归一化，即可求出各判别系数。

2. 临界值的确定

为与本文讨论的数例对应，我们这里考虑两组数据 A、B(即 $K=2$)的判别问题。

将判别系数代入，建立如(1)所示的判别函数：

$$y = a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_px_p \tag{6}$$

计算 A、B 两组重心：

$$\bar{y}(A) = \sum_{i=1}^{p} a_i\bar{x}_i(A), \bar{y}(B) = \sum_{i=1}^{p} a_i\bar{x}_i(B) \tag{7}$$

$\bar{x}_i(A)$，$\bar{x}_i(B)$ 分别为 A 组和 B 组第 i 个判别指标的平均值。

对它们按所含样本数进行加权，有

$$y_{AB} = \frac{n_1\bar{y}(A) + n_2\bar{y}(B)}{n_1 + n_2} \tag{8}$$

y_{AB} 即为两组判别的临界值。对待判的新样品的判组方法是：首先根据新样品的指标值，求出(6)式中新样品的函数值 y，然后按照 $\bar{y}(A)$、$\bar{y}(B)$ 与 y_{AB} 的关系确定：

① 如果 $\bar{y}(A) > y_{AB}$，那么当 $y > y_{AB}$ 时，则判该样品属于 A 组；若 $y < y_{AB}$，则判其属于 B 组。

② 如果 $\bar{y}(B) > y_{AB}$，那么当 $y > y_{AB}$ 时，则判该样品属于 B 组；若 $y < y_{AB}$，则判其属于 A 组。

3. 总体差异的显著性检验

用(8)式临界值进行判别时，y 取值空间划分的区域是不相交的，但理论上两个总体 A 和 B 之间总有相交部分。当样本落入相交部分就容易产生误判的想象。因此必须进行总体的显著性检验。只有 A、B 两组确实存在显著性差异，所求的判别函数及判别临界值才有意义。

设总体 A 的协方差阵的估计为 L_A，总体 B 的协方差阵的估计为 L_B，则检验两组(总体)是否有显著性差异的统计量是：

$$F_0 = \frac{n_1n_2(n_1 + n_2 - p - 1)}{(n_1 + n_2)p(n_1 + n_2 - 2)} \cdot (\bar{x}(A) - \bar{x}(B))^T \cdot S^{-1} \cdot (\bar{x}(A) - \bar{x}(B)) \sim F(p, n_1 + n_2 - p - 1) \tag{9}$$

其中

$$S = \frac{1}{n_1 + n_2 - 2}(L_A + L_B) \tag{10}$$

则可作出如下判断：

若 $F_0 \leqslant F_\alpha(p, n_1 + n_2 - p - 1)$，接受 H_0，认为两组无显著差异；

若 $F_0 > F_\alpha(p, n_1 + n_2 - p - 1)$，拒绝 H_0，认为两组有显著差异。

二、新增博士学位授予权单位评估判别分析

我们从第十次新增博士学位授予单位的评审材料中，抽取了 10 个通过评审的单位，称为 A 组，10 个未通过评审的单位，称为 B 组。评审指标按照“学术队伍”、“科学研究”、“教学与人才培养”三个方面细化为可度量的 18 个判别指标，$p=18$。

1. 求解判别系数

根据所取样本计算各指标均值向量和协方差阵。在计算时，为消除量纲的影响，我们对原始数据首先进行了标准化处理，转化为[0,1]区间值。

根据(5)式，利用 SPSS 统计软件，求出最大特征根，即得到判别系数。

均值 \ 指标 k	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$\bar{x}_k(A)$	0.6514	0.4607	0.4378	0.6056	0.4929	0.3824	0.4364	0.3000	0.1992
$\bar{x}_k(B)$	0.1904	0.2472	0.1338	0.2516	0.2085	0.2417	0.2335	0.0500	0.1170

均值 \ 指标 k	10	11	12	13	14	15	16	17	18
$\bar{x}_k(A)$	0.2000	0.2714	0.5891	0.3581	0.3222	0.3665	0.3000	0.4200	0.4568
$\bar{x}_k(B)$	0.1000	0.0571	0.3675	0.1097	0.1778	0.1582	0.1000	0.2000	0.1622

2.**建立判别函数,确定判别临界值**

将所求出的判别系数代入(6)式,建立对是否新增博士学位授予单位的判别函数:

$$\begin{aligned} y = {} & 1.244x_1 + 0.011x_2 - 2.944x_3 + 1.521x_4 \\ & + 1.318x_5 - 0.029x_6 + 1.31x_7 + 3.483x_8 \\ & - 0.285x_9 + 1.144x_{10} + 1.057x_{11} + 1.582x_{12} \\ & - 1.353x_{13} + 1.277x_{14} - 3.143x_{15} - 0.232x_{16} \\ & - 0.057x_{17} + 5.009x_{18} \end{aligned}$$

再求出 A、B 两组的重心,分别为:

$$\bar{y}(A) = \sum_{i=1}^{18} a_i \bar{x}_i(A) = 5.0632$$

$$\bar{y}(B) = \sum_{i=1}^{18} a_i \bar{x}_i(B) = 2.0582$$

从而判别临界值为:

$$y_{AB} = \frac{n_1 \bar{y}(A) + n_2 \bar{y}(B)}{n_1 + n_2} = \frac{1}{2}(5.0632 + 2.0582) = 3.5607$$

3.**判别结果检验**

将20个数据样本代入所求得的判别函数,利用判别临界值 $y_{AB} = 3.5607$ 得出的判别结果为:

样本	实际组	判别函数值	判别组	判别正确性
1	A	5.977	A	T
2	A	4.264	A	T
3	A	3.873	A	T
4	A	5.285	A	T
5	A	4.461	A	T
6	A	6.343	A	T
7	A	5.703	A	T
8	A	5.325	A	T
9	A	4.985	A	T
10	A	4.416	A	T
11	B	2.172	B	T
12	B	1.789	B	T
13	B	3.520	B	T
14	B	2.123	B	T
15	B	2.380	B	T
16	B	2.189	B	T
17	B	2.073	B	T
18	B	1.622	B	T
19	B	1.302	B	T
20	B	1.411	B	T

可知回判正确率为100%。

4.**总体差异的显著性检验**

根据检验显著性差异的统计量:

$$F_0 = \frac{n_1 n_2 (n_1 + n_2 - p - 1)}{(n_1 + n_2) p (n_1 + n_2 - 2)} \cdot (\bar{x}(A) - \bar{x}(B))^T \cdot S^{-1} \cdot (\bar{x}(A) - \bar{x}(B)) \sim F(p, n_1 + n_2 - p - 1)$$

由(10)式求出样本协方差矩阵 S,并计算得:

$$F_0 = 262.138$$

取 $\alpha = 0.05$,查表得 $F_\alpha(18,1) = 247.0$,因此有 $F_0 > F_\alpha(p, n_1 + n_2 - p - 1)$,故拒绝 H_0,认为两组有显著差异。可以用上述判别函数进行两组(新增或不新增)的判别分析。

三、结　　言

由于Fisher判别属于线性判别方法,因此在进行两组(类)判别分析中效果较好。本文以新增博士学位授予单位评估为例,以期将判别分析方法引入教育评估。实际上,只要所取得的各类别的样本数据具有代表性和可靠性,对于如论文质量的优劣,学科所属水平的高低,学校所属类别的区分等问题,均可以应用该方法进行判别分析。

(下转第76页)

发展做出了积极的贡献。不少毕业生已经成为各自单位的技术骨干或走上领导岗位。例如上海宝钢庄继勇结合企业实际问题完成的学位论文,经该公司合理化建议评审认定共创经济效益近1000万元。

Innovating Master of Engineering Programs to Create a New Mode for Training Innovative Professionals

XUE De-long, HAO Ji-ping, LIANG Ya-hong, WANG Yan-ping,
FENG Zheng-qing, QU Wei, LIU Guan

(*Graduate School, Xi'an University of Architecture and Technology, Xi'an, Shaanxi* 710055)

Abstract: Great changes have taken place in graduate education in China. To adapt to the new situation, the Xi'an University of Architecture and Technology has continued to enlarge its Master of Engineering programs by incorporating new thinking and an innovative mode of training. In so doing, it has overcome old problems and made impressive breakthroughs in its education endeavor. The Master of Engineering programs at the University are now highly noted for their unique strengths.

Keywords: Master of Engineering; innovation education; new mode

---

(上接第67页)

参考文献:

[1] 张尧庭,方开泰. 多元统计分析引论[M]. 北京:科学出版社. 1992.
[2] 袁志发,周静芋. 多元统计分析[M]. 北京:科学出版社. 2002.
[3] 梁立明等. 改进科学基金项目评审方法的两点设想[J]. 科研管理, 1994,(4).
[4] 郭亚军. 综合评价理论与方法[M]. 北京:科学出版社. 2002.

Discriminant Analysis and Its Application to Education Evaluation

CHEN Wei, XIA Qing-quan

(*Graduate School, University of Science and Technology of China, Hefei, Anhui* 230026)

Abstract: Discriminant analysis as a method of multivariate statistic analysis is widely used in many fields. A description is given of the mathematical model of discriminant analysis and its solutions. The application of discriminant analysis in actual evaluations is discussed with the evaluations of the country's tenth group of new doctoral programs as an example. It demonstrates how such quantitative analysis may be applied to education evaluation.

Keywords: multivariate statistics; discriminant analysis; education evaluation